ISSN 1733-8670

ZESZYTY NAUKOWE NR 10(82)
AKADEMII MORSKIEJ
W SZCZECINIE

IV MIĘDZYNARODOWA KONFERENCJA NAUKOWO-TECHNICZNA
EXPLO-SHIP 2006

Stefan Berczyński, Jacek Kaczmarek
Grzegorz Nicewicz, Zbigniew Idzi

Estymacja parametrów fizycznego falowego modelu wibroizolatorów gumowych

Słowa kluczowe: estymacja, wibroizolator, model fizyczny falowy wibroizolatora

Przedstawiono metodę estymacji parametrów fizycznego falowego modelu pryzmatycznych wibroizolatorów gumowych o zmiennych liniowo własnościach względem częstości sił wymuszających.

The Estimation of Parameters of Physical Wave Model of Rubber Vibration Mounts for Vibration Isolation Systems

Key words: estimation, vibration mount, physical wave model of a vibration mount

The paper describes a method for the estimation of parameters of a physical wave model of prismatic rubber vibration mounts for vibration isolation systems with linearly changing properties versus the frequency of forces.

Wstęp

Większość maszyn, m.in. okrętowych, jest posadawiana elastycznie w celu minimalizacji sił przenoszonych na fundamenty i podłoże. Jako elastyczne podkładki stosuje się często wibroizolatory gumowe, ze względu na dobre własności tłumiące gumy i jej stosunkową niską cenę. Właściwy dobór wibroizolatorów wymaga znajomości ich parametrów, określanych w procesie identyfikacji składającym się m.in. z modelowania, eksperymentu i estymacji.

Ze względu na nieliniowość rozważanego modelu wibroizolatora, tj. zależność jego parametrów od częstości sił wymuszających, do identyfikacji wykorzystuje się charakterystykę częstościową zwaną transmitancją wąskopasmową dla drgań podłużnych, najbardziej istotnych z punktu widzenia pracy wibroizolatora.

W artykule [4] przedstawiono ciągły fizyczny model falowy pryzmatycznego wibroizolatora gumowego, o parametrach zależnych od częstości sił wymuszających. Model ten, w odróżnieniu od klasycznego modelu reologicznego, uwzględnia masę własną wibroizolatora. We wspomnianym artykule wykazano, że model reologiczny zaniża wartości estymowanych parametrów.

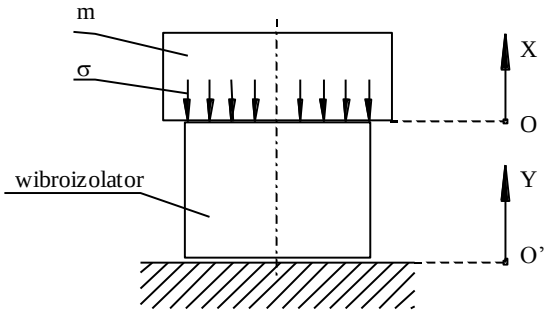
Ponadto wykazano [5, 9], że wrażliwość parametryczna charakterystyki fazowej transmitancji wąskopasmowej, zarówno modelu reologicznego jak i fizycznego wibroizolatora gumowego, jest zdecydowanie niższa od wrażliwości charakterystyki amplitudowej. Stąd w niniejszym artykule przedstawia się estymację parametrów wibroizolatora jedynie na podstawie charakterystyki amplitudowej transmitancji wąskopasmowej.

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie metody estymacji modułu zachowawczego sprężystości podłużnej i współczynnika strat materiału wibroizolatora oraz określenie zależności tych parametrów od częstości sił wymuszających.

1. Model wibroizolatora i badania eksperymentalne

Identyfikację charakterystyki amplitudowej transmitancji dla drgań podłużnych ciągłego, pryzmatycznego modelu wibroizolatora przeprowadza się na stanowisku pokazanym schematycznie na rysunku 1. Wibroizolator mocuje się jedną powierzchnią czołową do drgającego sinusoidalnie podłoża O', a do drugiej powierzchni czołowej O mocuje się masę dodatkową m. Badany układ z wibroizolatorem zapewnia praktycznie niezmienność amplitudy odkształceń wibroizolatora w całym zakresie zmian częstości ν drgań. Zmiany względnych amplidud odkształceń wibroizolatora w prezentowanych badaniach nie przekraczają bowiem 1‰ i na podstawie wyników badań [7] można przyjąć, że wpływ tak

małych zmian amplitudy drgań na parametry wirboizolatora jest pomijalnie mały.



Rys. 1. Schemat układu wibroizolatora z masą dodatkową *m* do badań transmitancji wąskopasmowej dla drgań podłużnych wibroizolatora

Fig. 1. A schematic diagram of the vibration mount with additional mass m for testing narrow band transmittance for longitudinal vibration

Moduł transmitancji wąskopasmowej dla przyjętego modelu fizycznego falowego wibroizolatora, oznaczający maksymalne przemieszczenie względne przekroju końcowego wibroizolatora z dołączoną *i*-tą masą dodatkową względem amplitudy ruchu podłoża, określony jest wyrażeniem [4]:

$$G_i^E(\nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n k}{\gamma_n^2} \sqrt{\frac{1+\eta^2}{\left(\omega_n^2 - \nu^2\right)^2 + \left(\eta\omega_n^2\right)^2}} \sin\left(\frac{\omega_n}{k} h\right) \sin\left(\nu t_{\max} + \psi - \varphi_n\right) \qquad (1)$$

gdzie:

$E(\nu)$, $\eta(\nu)$ – moduł Younga i współczynnik strat materiału wibroizolatora,

$k = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$; ρ – gęstość materiału wibroizolatora,

$tg\frac{\omega_n}{k} h = \frac{1}{\frac{m_i}{m_w}\frac{\omega_n}{k} h}$; m_w, h – masa własna i wysokość wibroizolatora,

m_i – wartość *i*-tej masy dołączonej do wibroizolatora,

$$\gamma_n^2 = \frac{m_i}{m_w} h \sin^2\left(\frac{\omega_n}{k} h\right) + \frac{h}{2}\left(1 - \frac{\sin\left(2\frac{\omega_n}{k} h\right)}{2\frac{\omega_n}{k} h}\right),$$

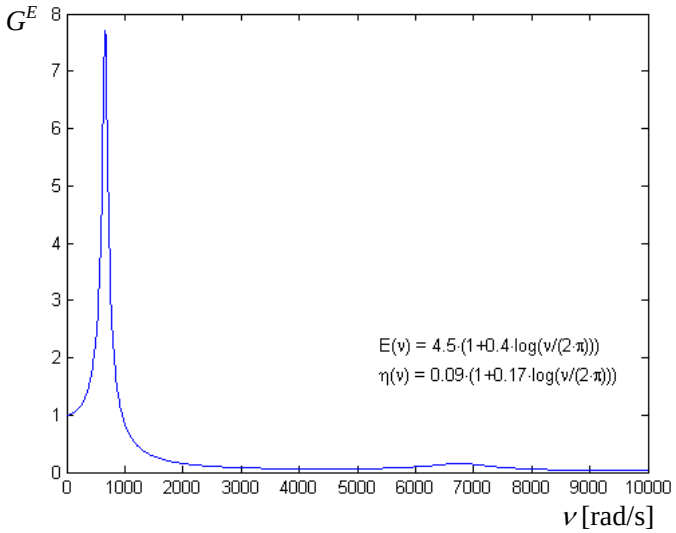
$$\psi = \operatorname{arc\,tg} \eta ,$$

$$\nu\, t_{\max} = \operatorname{arc\,tg} \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n k}{\gamma_n^2} \sqrt{\frac{1+\eta^2}{\left(\omega_n^2-\nu^2\right)^2+\left(\eta\omega_n^2\right)^2}} \sin\left(\frac{\omega_n}{k} h\right) \cos\left(\psi-\varphi_n\right)}{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n k}{\gamma_n^2} \sqrt{\frac{1+\eta^2}{\left(\omega_n^2-\nu^2\right)^2+\left(\eta\omega_n^2\right)^2}} \sin\left(\frac{\omega_n}{k} h\right) \sin\left(\psi-\varphi_n\right)} ,$$

$$\varphi_n = \operatorname{arc\,tg} \frac{\eta}{1-\dfrac{\nu^2}{\omega_n^2}} \qquad \text{dla} \quad 1-\frac{\nu^2}{\omega_n^2} > 0 ,$$

$$\varphi_n = \pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{\eta}{1-\dfrac{\nu^2}{\omega_n^2}} \qquad \text{dla} \quad 1-\frac{\nu^2}{\omega_n^2} < 0 .$$

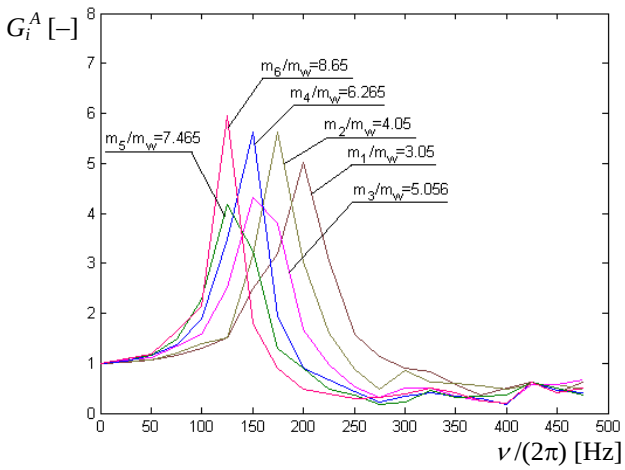
Powyższy model fizyczny falowy uwzględnia masę własną wibroizolatora i dlatego moduł transmitancji tego modelu, w przeciwieństwie do modelu reologicznego, odzwierciedla przy wyższych częstościach rezonanse własne wibroizolatora (rys. 2).



Rys. 2. Wykres modułu G^E transmitancji modelu falowego badanego wibroizolatora z widocznymi dwoma pierwszymi rezonansami; logarytmiczna zależność parametrów od częstości ν według [7]
Fig. 2. A diagram of modulus G^E of the transmittance for physical wave model of the examined vibration mount with evident two first resonances; logarithmic dependence of parameters on frequency ν according to [7]

Badaniom identyfikacyjnym poddano wibroizolator cylindryczny, wykonany z kauczuku naturalnego o twardości około 60° Sh i masie własnej m_w = 0,215 kg, o wymiarach w stanie nieobciążonym: ϕ 69,7 mm; h = 44,8 mm; o gęstości ρ około 1250 kg/m^3. Do powierzchni czołowych były przywulkanizowane płytki stalowe o średnicy równej średnicy elementu gumowego i o grubości 2,8 mm.

Wartości eksperymentalne $G_i^A(\nu)$ modułu transmitancji wyznaczono dla sześciu wartości masy dodatkowej m_i = 0,656 ÷ 1,86 kg i dla zakresu częstości ν =2π·(25 ÷ 475) rad/s. Wyniki pomiarów przedstawiono na rysunku 3.



Rys. 3. Wyniki pomiarów charakterystyki amplitudowej $G_i^A(\nu)$ transmitancji wąskopasmowej dla drgań podłużnych badanego wibroizolatora dla sześciu wartości masy dodatkowej m

Fig. 3. Attenuation diagram $G_i^A(\nu)$ of narrow band transmittance for longitudinal vibration of the examined vibration mount for six values of additional mass m

Z wcześniejszych badań wynika [5, 9], że w punktach rezonansowych wrażliwość względna charakterystyki amplitudowej transmitancji wąskopasmowej względem modułu sprężystości podłużnej E jest równa zero, natomiast względem współczynnika strat η osiąga wartość maksymalną. Stąd w badaniach starano się unikać pomiarów charakterystyki w punktach rezonansowych.

2. Metoda i problemy estymacji parametrów

Spośród wielu metod estymacji parametrów (w dziedzinie czasu, w dziedzinie częstości, modeli regresyjnych [1, 6, 8]) najbardziej efektywną i najczęściej stosowaną dla estymacji w dziedzinie częstości jest metoda nieliniowych najmniejszych kwadratów. Polega ona na aproksymacji zmierzonych charakterystyk częstościowych, w tym przypadku charakterystyk amplitudowych $G_i^A(\nu)$

pokazanych na rysunku 3, charakterystykami teoretycznymi $G_i^E(\nu)$ opisanymi wyrażeniem (1). Poszukiwane estymatory modułu E i współczynnika strat η wyznacza się z warunku najlepszego dopasowania obu charakterystyk dla danej częstości ν_j przy różnych masach dodatkowych m_i, oznaczającego minimum sumy kwadratów odchyleń Δ_j między wartościami modułów charakterystyk amplitudowych doświadczalnych i teoretycznych, wyznaczonymi dla skończonej liczby n różnych mas dodatkowych m_i:

$$\Delta_j = \min \sum_{i=1}^{n} \left(G_i^A(\nu_j) - G_i^E(\nu_j) \right)^2 \tag{2}$$

Z powyższego warunku wynikają dwa równania z niewiadomymi E i η, silnie nieliniowe zarówno względem poszukiwanych parametrów jak i częstości ν:

$$\begin{aligned} F_1 &= \sum_{i=1}^{n} \left(G_i^A(\nu_j) - G_i^E(\nu_j) \right) \left(\frac{\partial G_i^E}{\partial E} \right)_{\nu=\nu_j} = 0 \\ F_2 &= \sum_{i=1}^{n} \left(G_i^A(\nu_j) - G_i^E(\nu_j) \right) \left(\frac{\partial G_i^E}{\partial \eta} \right)_{\nu=\nu_j} = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

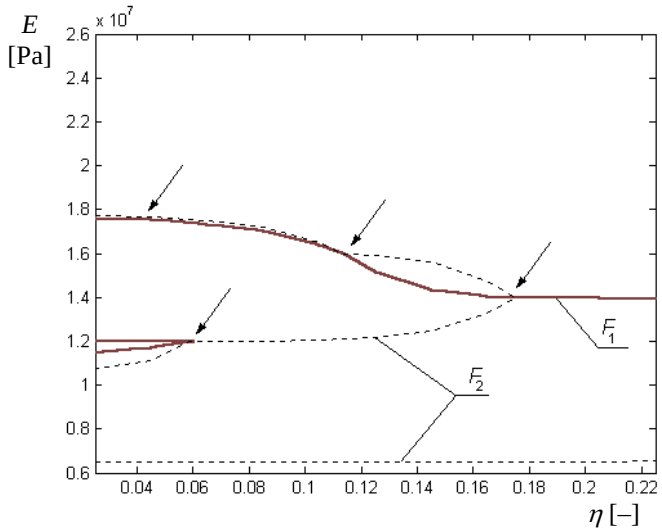
gdzie współczynniki bezwzględnej wrażliwości $\left(\partial G_i^E / \partial E\right)_{\nu=\nu_j}$ i $\left(\partial G_i^E / \partial \eta\right)_{\nu=\nu_j}$ modułu transmitancji względem E i η dla danej częstości ν_j wyznacza się jako iloraz współczynnika wrażliwości względnej $WW_{Gi/E}$ lub $WW_{Gi/\eta}$ (według [5]) i odpowiedniego parametru E lub η:

$$\left(\frac{\partial G_i^E}{\partial E} \right)_{\nu=\nu_j} = \frac{WW_{G_i/E}}{E(\nu_j)} \; ; \; \left(\frac{\partial G_i^E}{\partial \eta} \right)_{\nu=\nu_j} = \frac{WW_{G_i/\eta}}{\eta(\nu_j)} \tag{4}$$

Silna nieliniowość równań (3) oraz mała wrażliwość charakterystyk amplitudowych transmitancji – zarówno w punktach rezonansowych, jak i w znacznym od nich oddaleniu, tj. w górnym obszarze rozważanego zakresu częstości (rys. 3) – powodują niekiedy słabą zbieżność standardowych procedur iteracyjnych, a nawet rozbieżność i niejednoznaczność rozwiązań przy źle dobranych punktach startowych procedury iteracyjnej. Przykładem takiej procedury jest chociażby *lsqnonlin* środowiska Matlab.

Uzasadnieniem powyższego jest graficzne przedstawienie rozwiązań równań (3) na płaszczyźnie (η, E), uzyskanych za pomocą procedury *contour* w środowisku Matlab, pokazanych na rysunku 4. W analizowanym zakresie

zmienności parametrów E i η istnieje przynajmniej kilka możliwych rozwiązań, oznaczonych na rysunku strzałkami. W zależności od wyboru punktu startowego otrzymuje się więc różne rozwiązania i procedura iteracyjna jest niejednoznaczna. Konieczna jest więc w takim przypadku analiza graficzna rozwiązań i eliminacja pewnych rozwiązań jako nie mieszczących się w zakresie możliwych dla danej częstości ν rozwiązań, wynikających z ogólnego charakteru zależności poszukiwanych parametrów od częstości ν.

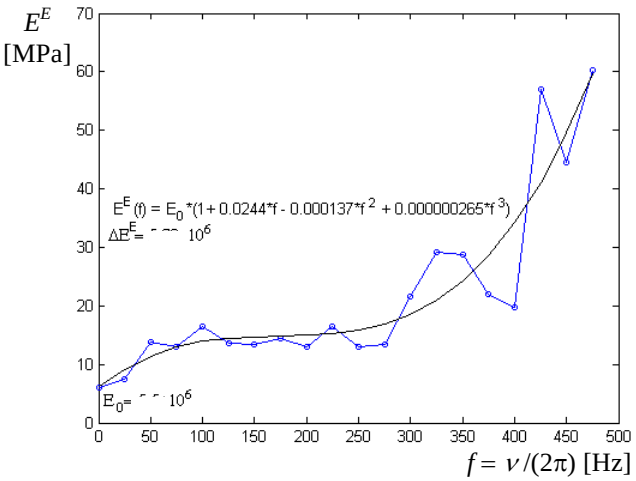


Rys. 4. Wykresy możliwych rozwiązań równań (3) na płaszczyźnie (η, E) dla częstotliwości f =125 Hz

Fig. 4. Diagrams of acceptable solutions of equations (3) on (η, E) plane for frequency f =125 Hz

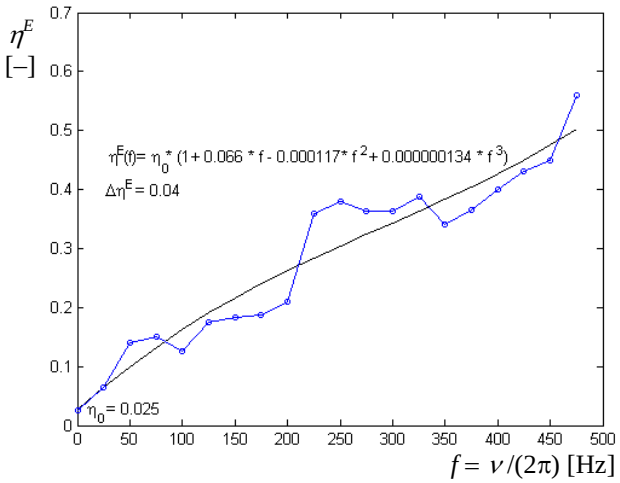
3. Wyniki estymacji parametrów wibroizolatora

Estymatory parametrów E i η modelu falowego badanego wibroizolatora dla danej częstości ν_j wyznaczano w środowisku Matlab bezpośrednio z równania (2) standardową procedurą *lsqnonlin*, w przypadku zbieżności procedury i jednoznaczności rozwiązania, lub wykorzystując procedurę *contour*, w przypadku rozbieżności procedury *lsqnonlin* i niejednoznaczności rozwiązania. Wykresy zależności wartości estymat parametrów modelu falowego badanego wibroizolatora od częstości ν przedstawiono na rysunkach 5 i 6. Wartości początkowe E_0 i η_0 estymat parametrów modelu dla częstości $\nu = 0$ przyjęto na podstawie wcześniejszych badań statycznych wibroizolatora.



Rys. 5. Wartości estymaty $E^E(f_j)$ modułu zachowawczego modelu falowego badanego wibroizolatora dla dyskretnych częstotliwości f_j oraz wielomian $E^E(f)$ trzeciego stopnia najlepiej dopasowany do wartości estymat w rozważanym zakresie częstotliwości $f = 0 \div 475$ Hz

Fig. 5. Values of $E^E(f_j)$ of the examined vibration mount physical wave model for discrete frequencies f_j and polynominal $E^E(f)$ with the best fit curve $E^E(f_j)$ in the frequency range $f = 0 \div 475$ Hz



Rys. 6. Wartości estymaty $\eta^E(f_j)$ współczynnika strat kauczuku badanego wibroizolatora dla dyskretnych częstotliwości f_j oraz wielomian $\eta^E(f)$ trzeciego stopnia najlepiej dopasowany do wartości estymat w rozważanym zakresie częstotliwości $f = 0 \div 475$ Hz

Fig. 6. Values of the rubber loss factor $\eta^E(f_j)$ of the examined vibration mount for discrete frequencies f_j and polynomial $\eta^E(f)$ with the best fit curve $\eta^E(f_j)$ in the frequency range $f = 0 \div 475$ Hz

Z przeprowadzonych analiz wynika, że przy wzroście częstotliwości f od 0 do 100÷150 Hz przyrost sztywności i tłumienia wibroizolatora jest w przybliżeniu logarytmiczny, tj. zgodny z wynikami innych badań [7], aczkolwiek nieznacznie lepsze dopasowanie posiada wielomian trzeciego stopnia. Przy wyższych częstotliwościach dochodzących do 475 Hz stwierdza się silne usztywnienie (rys. 5) oraz silny wzrost tłumienia (rys. 6) badanego wibroizolatora. Zdecydowanie najlepsze dopasowanie do wartości estymowanych parametrów posiada w tym szerokim zakresie częstotliwości wielomian trzeciego stopnia. Najlepiej dopasowane postacie wielomianów dla estymat modułu zachowawczego $E^E(f)$ i współczynnika strat $\eta^E(f)$ oraz średnie kwadratowe odchylenia wartości estymat parametrów ΔE^E i $\Delta\eta^E$ od wielomianów aproksymujących, przedstawiono na rysunkach 5 i 6.

Szybki wzrost sztywności i wzrost tłumienia, znacznie większy niż wykazują to inne wyniki badań [7], wynika z przywulkanizowania do powierzchni czołowych stalowych płytek. Cząstki materiału wibroizolatora stykające się z płytkami nie mogą wykonywać ruchów stycznych do płytki, stąd nie występuje między nimi tarcie i strata energii wypromieniowywana w postaci ciepła do otoczenia. Wniosek ten wymaga jeszcze doświadczalnego potwierdzenia.

Wnioski

1. Z przedstawionych w artykule analiz wynika możliwość estymacji w dziedzinie częstości parametrów ciągłego nieliniowego względem częstości modelu falowego wibroizolatora gumowego metodą nieliniowych najmniejszych kwadratów, aproksymującą charakterystykę amplitudową transmitancji wąskopasmowej dla drgań podłużnych, zazwyczaj najbardziej istotnych z punktu widzenia pracy wibroizolatora.
2. Formalne podobieństwo równań różniczkowych cząstkowych, opisujących drgania skrętne i podłużne pryzmatycznego modelu wibroizolatora, pozwala rozszerzyć przedstawioną metodę identyfikacji parametrów wibroizolatora również na drgania skrętne.
3. Przedstawione wyniki badań potwierdzają konieczność identyfikacji parametrów wibroizolatorów na podstawie badań rzeczywistych obiektów w rzeczywistych warunkach (np. z ograniczeniami przemieszczeń płaszczyzn czołowych wibroizolatora) i niemożność przenoszenia wyników badań (przynajmniej niektórych) standardowych próbek na rzeczywiste obiekty.

Literatura

1. Eykhoff P., *Identyfikacja w układach dynamicznych*. PWN, Warszawa 1980.

2. Giergiel J., Uhl T., *Identyfikacja układów mechanicznych*. PWN, Warszawa 1990.
3. Kaczmarek J., Nicewicz G., *Analiza wrażliwości parametrycznej reologicznego oraz fizycznego falowego modelu wibroizolatorów elastomerowych*. Zeszyty Naukowe Akademii Morskiej w Szczecinie, nr 10(82), Explo-Ship 2006, Szczecin 2006, s. 215 – 224.
4. Kaczmarek J., Nicewicz G., Idzi Z., *Identyfikacja parametrów reologicznych wibroizolatorów gumowych na podstawie ich modelu fizycznego.* Zeszyty Naukowe Akademii Morskiej w Szczecinie, nr 5(77), Obsługiwanie Maszyn i Urządzeń Okrętowych 2005, Szczecin 2005, s. 279 – 292.
5. Kaczmarek J., Nicewicz G., *Wrażliwość parametryczna reologicznego i fizycznego modelu wibroizolatora gumowego*, Zeszyty Naukowe Akademii Morskiej w Szczecinie, nr 5(77), Obsługiwanie Maszyn i Urządzeń Okrętowych 2005, Szczecin 2005, s. 267 – 277.
6. Mańczak K., Nahorski Z., *Komputerowa identyfikacja obiektów dynamicznych*. PWN, Warszawa 1983.
7. Pękalak M., Radkowski S., *Gumowe elementy sprężyste*. PWN, Warszawa 1989.
8. Uhl T., *Komputerowo wspomagana identyfikacja modeli konstrukcji mechanicznych*. WNT, Warszawa 1997.
9. Wicher J., *Analiza właściwości materiału wibroizolacyjnego opisanego modelem reologicznym.* Prace IPPT PAN nr 31, Warszawa 1981.

Wpłynęło do redakcji w lutym 2006 r.

Recenzent

prof. dr hab. inż. Karol Grudziński

Adresy Autorów

prof. dr hab. inż. Stefan Berczyński
dr inż. Jacek Kaczmarek
mgr inż. Grzegorz Nicewicz
Zbigniew Idzi
Akademia Morska w Szczecinie
Instytut Nauk Podstawowych Technicznych
Zakład Mechaniki Technicznej i Rysunku
70-500 Szczecin, ul. Wały Chrobrego 1/2